

第6学年の実践例

単元 比例 【発展的な学習】

1. 私の主張

『数学的リテラシーの育成』

平成16年、経済協力開発機構（OECD）の「生徒の学習到達度調査」（PISA）における2003年調査の枠組みが公表された。その中で日本の子どもたちの数学的リテラシーがあまりよくない状況が報告されている。数学的リテラシーとは、「数学が世界で果たす役割を見つけ、理解し、現在及び将来の個人の生活、職業生活、友人や家族や親族との社会生活、建設的で関心を持った思慮深い市民としての生活において確実な数学的根拠にもとづき判断を行い、数学に携わる能力」としている。

算数、数学において、身に付けた知識や技能を適切に活用する力をつけるためには、基本的な概念の意味を理解するとともに、与えられた状況やデータを数学的に解釈し、それに基づいて自分の考えを整理し、数学的な表現を用いて自分の考えを述べる力を育てることが大切である。しかし、算数学習と日常の事象のつながりがもてないというつまずきが指摘されているのも事実である。このような現状から、主要な単元においてその有用性を感得できるような内容を設定し、現実と乖離した学習にならないよう、生活に必要な学問であることを理解させたい。

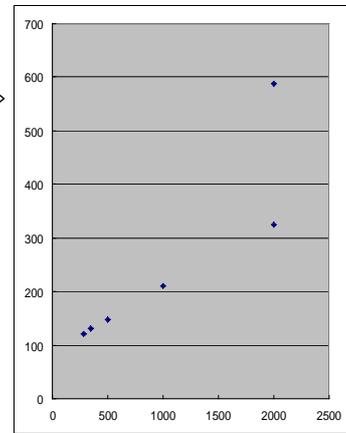
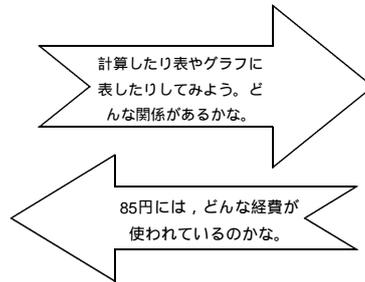
2. そのための教材開発

本単元で必ず身につけさせたい基礎・基本は、 $y = ax + b$ の関係において比例関係と見るために b を捨象した見方ができることである。考えるときには b を捨象するのだが、単に無視するのではなく、「 b は容器などの値段だから」という理由付けをしていくことが大切である。そしてグラフにうった4つの点が直線上に並ぶことが必然であると判断し、その前に予想していたゆるやかな曲線から視点の転換が求められる。

展開にあたっては、500 ml のペットボトルが147円のときの4本分を求める。このときは倍関係がみられるが2 L のペットボトルは325円で、4本分のときとは異なる関係に見える。しかし、いろいろなペットボトルを調べると直線にある。このときに比例と見るためにその要素を子どもたちが理由づけていく。その根拠こそが生活に生きる比例の認識といえる。理由付けが筋道立てて説明できたとき、 b を捨象した関係が比例であると判断できるかどうかの本時の評価の対象となる。



容量(ā)	500	2000	1000	350	280
値段(円)	147	325	210	131	120



3 . 教材開発の経緯と留意点

本時においての課題を一般的に言えば「たくさん買うほどお買い得」、数学的に言えば「量が増えるほど1āあたりの値段は安くなる」という仮説をもち追究意欲を高めることである。

数学的な追究の前に日常事象としての認識を深めておく必要がある。そうすれば、「たぶん円よりは高くて、円以上には絶対にならない」という結果の挟み込みも可能になる。また、消費者としての願望や見解から、見通しをもった活動が可能になる。ペットボトルだけでなく、一般的に販売されている商品についても広げて考えるようになる。このような見方が、提示された数値だけを処理するのではなく自分から数値を見つけ出したり関係づけたりする資質の育成につながり、算数を有効に活用できる子の育成ができると考えている。

本時では、数値だけを見て比例かどうかを問われると比例ではないとすぐに答える題材である。よく目にするペットボトルで、その事象を観察していくと、数値だけの判断ではなく、何か秘密がありそうだという探求心が生まれる。この探求心をもとにして題材を観察していくとき、いろいろな見方ができて生活経験とつないだ根拠を導き出す。この過程を大切にしたい。

本時の題材、 $y = ax + b$ からbを取り除いて考えることは、表からだけでは見抜くことができないと言っていいだろう。しかし、具体物を目にしたときには自然とそれができるようになる。手でもって飲んだこと、飲み終えて空になったこと、リサイクルコーナーに入れたこと、輸送している人々などbにあたる要素はたくさん思い当たる。bはあって当然と言ったうえで比例関係の判断は、自然な形で数学的リテラシーが身に付いたと考えている。

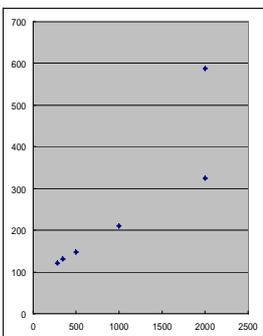
「この関係は比例ではない」、「でも直線になりそうだ」、「どうにかしたら、この関係を比例と見ることができそうだ」という意識になったとき、「～なら、～だったら」を使って説明してみましようという助言をする。そして、比例かどうかの考えをノートに書いて、友達と話し、友達からのコメントをもらう活動をする。85円を除いて考えると比例のグラフになることが判断できたかを、ノート記述及び発表で評価する。

4 . 展開

(1) 目標

- ・ $ax + b$ のグラフを具体場面とつないで考えたとき、 b を捨象することで比例関係と判断することができる。
- ・ 身近な数量を考察したとき、いくつかの数量とつないで考えたり捨象して考えたりすることでその関係性が明らかになることがわかり、数学的根拠に基づいた判断のよさにふれ、算数の処理のよさを実感することができる。

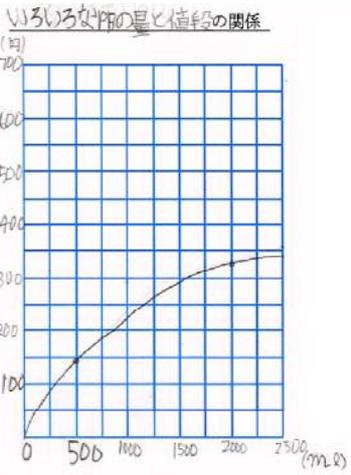
(2) 学習指導過程

学習活動と子どもの意識	留意点と手立て												
<p>1 容量と値段の関係 に課題意識をもつ。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 500ml のペットボトルが147円するとき、4本分は、その4倍で588円だ。 ・ 2L のペットボトルは325円で、ずっと安くしてくれているよ。 ・ お茶の量と値段の関係を調べよう。 <p>2 仮説を話し合い、他のペットボトルで調べてみる。</p> <div style="display: flex; align-items: center; margin: 10px 0;"> <table border="1" style="margin-right: 20px;"> <tr> <td>容量</td> <td>500</td> <td>2000</td> <td>1000</td> <td>350</td> <td>280</td> </tr> <tr> <td>値段</td> <td>147</td> <td>325</td> <td>210</td> <td>131</td> <td>120</td> </tr> </table>  </div> <p>3 グラフが直線になることから、比例関係とみるための根拠を探る。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 同じお茶で、大きさの違うペットボトルがいくらか分かると考えやすいよ。 ・ ペットボトルの代金はいくらなんだろう。 ・ 表とグラフにするとよくわかるね。 ・ グラフは直線になりそうだな。 ・ 縦軸と横軸の交わる点は通らないよ。 	容量	500	2000	1000	350	280	値段	147	325	210	131	120	<p>本数と値段の比例関係を確認することによって、2L のペットボトル325円が、その比例関係にならないことを意識付け課題意識を強める。</p> <p>たくさん買うとお買い得だった経験を出し合い、本時の題材にあてはめて考えられるようにする。</p> <p>解決するために必要な情報を生活経験から探る。</p> <p>関係をつかむための情報として1000ml 210円、350ml 131円、280ml 120円の3種類のペットボトルを資料として提示する。</p> <p>関係をつかむために、表とグラフを活用することを指導する。</p> <p>y 切片、直線か曲線かに着目できるよう助言し、かかわり合う視点とする。</p> <p>原点を通らないので比例ではないことを確認する。</p> <p>0ml のときにも85円の値段があることに着目し、「この85円は何だろう」という考えと、「もしこ</p>
容量	500	2000	1000	350	280								
値段	147	325	210	131	120								

<ul style="list-style-type: none"> ・ 比例じゃないけど直線になるよ。 <p>4 不要な部分を除いて考える理由を明確にして，比例関係とみなす。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 85円をのけて考えると比例のグラフになるよ。表の縦の関係，横の関係もおよそあっている <p>5 学習を振り返り，広がり期待する。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 身の回りの数にはたくさん秘密がありそうだね。 ・ みんなで見つけたものも，追究してみよう。 	<p>の85円がなかったら…」という考えを話し合いの中から抽出する。</p> <p>評：85円を除いて考えると比例のグラフになることが判断できたか。</p> <p>ワークシート記述及び発表</p> <p>85円の値段の中に込められた様々な要素を知り，値段を見るときの見方を養う。</p> <p>評：学習の内容と学び方を振り返る。</p> <p>ワークシートの記入</p> <p>学習の広がりとして，うどんの値段，ピザの直径と値段を提示し，話し合う。</p>
---	--

5 考察

500ā のペットボトルが147円，2c のペットボトルは325円というデータを提示したとき，多くの児童は右のような曲線を予想する。やはり原点からスタートし，(500, 147)(2000, 325)の点を通過しようとする。この曲線は，「量が多くなれば安くなりそうだ」という考え方が現れたものである。そのあとに提示する280ā，350ā，1000ā を結んだとき直線状になることを板書で示すことが大切である。その上で，y切片の数値を考えていくようになる。



このような流れで子どものつまずきが予想されるのは，直線と見なすかどうか，表の数値が完全な比例関係といえないところで比例と認識するか，y切片の85円をどのように解釈するかということである。この部分については，ある程度の教師のリードが必要となる。最後に提示するうどんの例は，～ のつまずきに陥りそうなときに提示するののも一つの方法である。

かけうどん ラインナップ



小	中	大	特大
1玉	2玉	3玉	4玉
150円	180円	210円	240円

このような実践を通して，子どもたちが日常よく目にする値段を数学的に考えて判断していく資質を身に付け，算数の有用性を実感してほしいものである。

第6学年の開発教材の有効性と課題の分析

単元 比例 (発展的な学習)

1. 各支部からの実践報告より

(1) 目標

$y = ax + b$ のグラフを具体場面とつないで考えたとき、 b を捨象することで比例関係と判断することができる。

身近な数量を考察したとき、いくつかの数量とつないで考えたり捨象して考えたりすることでその関係性が明らかになることが分かり、数学的根拠に基づいた判断のよさにふれ、算数の処理のよさを実感することができる。

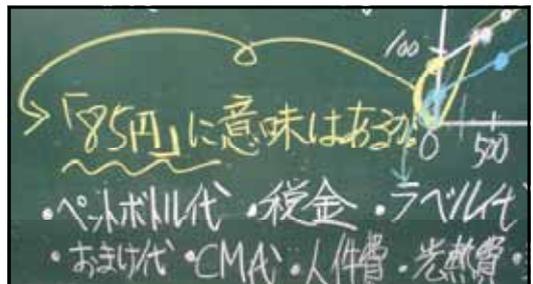
(2) 子どもの様相

1000m - 210円, 350m - 132円, 500m - 150円, 2000m - 330円, 280m - 124円の5つのデータを表で示し、グラフ用紙に対応する点を打っているときに子どもたちは「比例していない。」とつぶやいていた。理由を聞くと「直線でないから。」ということであった。

「容量と値段の関係を分かりやすくするために線を引いてみよう。」と子どもたちに発問したとき「0mは0円だから(0,0)の点を通るはずだ。」という意見と、「直線になるから(0,0)は通らないのではないか。」という意見が出てきた。

「直線なら分かりやすいのになあ。」というつぶやきを取り上げて「0mのとき約85円になる。この85円に意味があれば直線でみんな納得できるね。この85円の意味を考えてみよう。」と発問した。これに対して子どもたちは抵抗なく85円の意味を考えようとしていた。

直線になることを主張していたA子が「ペットボトル代がこの85円になるのではないか。」という意見を言ったら「箱代も入る。」「税金はどう。」というつぶやきが出たので、グループで話し合いを行った。その話し合いでは「0mだから



子どもの反応(板書)

0円」と主張していた子ども全員が「0mのときの85円には意味がある。」という考えに変わり、いろいろな意味を考えていた。

0mのときの85円には、ペットボトル代、電気代、税金、ラベル代、運送費、人件費、CM代、箱代等が含まれているという意見が出た。そして、350mでも1000mでも

2000mでも1本あたり同じような値段がかかっているので一度にたくさんの量のペットボトルを買う方が割安なんだということに納得していたようである。

うどん代について「チャレンジしよう」のかけうどんについて玉数と値段の関係も同様に考えると、直線になり0玉のときの120円には、だし汁の代金、水代、洗い代、割り箸代、人件費、どんぶり代、場所代、機会代、光熱費が含まれる。という意見がどんどん出てきた。

(3) 教材の有効性についての考察

現実のペットボトルに入っているお茶の値段とその量の関係をグラフによって比べ、きまりを見つけていく活動自体が日常生活と算数をつなげることになっていると思われる。

「0mだから0円はあたりまえ」というつぶやきに対して他の子どもたちは直観的に納得したのではないか。それゆえ、(280, 124)と(0, 0)をつないでいた子が多くいた。(280, 124)より後ろが直線になっていても曲げてつなげていた。この直観的に感じた内容が納得できる形で崩されたので(0, 85)の85に意味を感じたとき、子どもたちに新たな発見が生まれ、それが意欲となってどんどん意味を考えられたと思われる。

2問目のうどんの問題では、新たな発見をうどんにも使えたという心地よさからどんどん意味を考えることができていた。チャレンジの問題は典型的な問題なので、授業の2問目に使うとよいと感じた。

$y = ax + b$ の関係で直線であるが原点を通らない場合が日常の世界では多くあるということを実感できたと思う。この場合bを除けば比例になる。差が一定であればグラフが直線になる。などグラフを基にもう少し $y = ax + b$ の関係について話し合う時間をとってよいと感じた。

『チャレンジしよう』の評価問題の正答率は86%(28名中24名正解)であった。30ずつ増えるということとグラフが直線になっていることとのつながりがきちんともてていないと思われる子どもが間違っていた。

『チャレンジしよう』の評価問題では、「どんぶり代などを除けば比例になる。」と $y = ax + b$ のbを除けば原点を通る直線になると答えた子どもが50%(28名中14名)「原点を通っていないけど直線なので比例になる。」と答えた子どもが29%(28名中8名)その他が6名であった。新たな意味を考えただけで、この関係も比例の仲間に入れた子が3割近くいたので「1次関数」という新たな用語を示して「比例ではないが、きちんとした名前がついているんだ。」とおさえおけばより理解が深まったのではないかと考えている。

The image contains three parts related to a math problem about udon prices:

- Table:**

玉	串	六	箱六
1玉	2玉	3玉	4玉
150円	180円	210円	240円
- Graph:** A coordinate plane with the x-axis labeled '玉の数' (number of udon balls) and the y-axis labeled '値段' (price). A straight line is drawn through the points (1, 150), (2, 180), (3, 210), and (4, 240). Handwritten notes on the graph include 'だし汁の代金 120円' (dashiji price 120 yen) and '水代 30円' (water price 30 yen).
- Handwritten Answers:**
 - ① うどんの玉の数と値段をグラフに表しましょう。
 - ② 5玉のかけうどんがあるとすると、いくらでしょうか。
式 $140 - 110 + 30$ 答え 270円
 $240 + 30 = 270$
 - ③ うどんの玉の数と値段の関係を「比例」ということばをつかって表してみましょう。
うどんの玉が、1玉増えるごとに、30円ずつ増えている。
人件費や光熱費が加わると、うどんの玉とは、比例していません。

評価問題『チャレンジしよう』

2. 開発教材の改善の視点

改善の視点 比例の関係を問題解決に生かす(数学的リテラシー)扱い方

現行の学習指導要領には、「比例の学習を通して、これまでに学んできた関数的な関係をまとめるとともに、比例関係を問題の解決に利用するなどして、関数の考え方を深めることが大切である」(p.162)と書かれている。

また、数学的リテラシーとは、「数学が世界で果たす役割を見つけ、理解し、現在及び将来の個人の生活、職業生活、友人や家族や親族との社会生活、建設的で関心を持った思慮深い市民としての生活において確実な数学的根拠にもとづき判断を行い、数学に携わる能力」としている。

これらに基づいて実践する場合、どのように解釈するかで、扱う範囲が異なったり、重点の置き方が変わったりする。それが、各支部で実践された報告に現れている。

有効性の面では次のことが挙げられる。

・既習事項(比例)を振り返りながら解くことができ、算数の楽しさを感じられる教材である。

ペットボトルの容量と値段の2量の間を関係を考えることは、児童にとって一見きまりのない関係に思われる2量が、表やグラフ、ことばの式に表すことで、比例の関係が含まれていることを一つひとつの過程をふみ、導くことのできる有効な教材である。

・身近な素材であり、学習への興味や関心が高まる。

子どもたちのものの値段を数学的に考えて見ていくことに抵抗があったが、見方がより柔軟になり、身の回りにあるものを数学的な見方で考えるきっかけになった。

・一次関数の素地指導となる。

$y = ax + b$ の関係で直線であるが原点を通らない場合が日常の世界では多くあるということを実感できた。この場合bを除けば比例になる。差が一定であればグラフが直線になる。などグラフを基に $y = ax + b$ の関係について話し合う時間をとってよい。

・評価問題で関係をグラフに表すことができる。

『チャレンジしよう』の評価問題の正答率は86%(28名中24名正解)であった。30ずつ増えるということとグラフが直線になっていることとのつながりがきちんともてていないと思われる子どもが間違っていた。

・ $y = ax + b$ の関係の存在に気づき、それを比例の関係と比較するという体験が、比例に対する考え方や理解を深めることにつながっている。また、この経験が中学校の1次関数の学習の素地となっていくのではないかと考える。

・ $ax + b$ のグラフを見て、「比例でない」ということは、ほぼ全員理解しているし、 $y = ax$ になっているところは「比例している」ことも理解できていた。

反対に問題点は、次のようなことである。

・直線とみることに難しさがある。

350m 以下を直線で結ぶことに抵抗がある。子どもの発想で b にあたる90円を導くときに難しさを感じる。

・ b の理解が難しい。

「 b 」という存在の理由付けについては、少しとまどっているのか、あまり反応がなかった。その理由として、何か計算して求めないといけないという算数(計算)の概念が強く、ものが見方が一方からしか見られなかったのではないかと考えられる

・問題の構造を説明する力が望まれる。

評価問題 では、「どんぶり代などを除けば比例になる。」と $y = ax + b$ の b を除けば原点を通る直線になると答えた子どもが50%(28名中14名)「原点を通過していないけど直線なので比例になる。」と答えた子どもが29%(28名中8名)その他が6名であった。

・比例だけを指導することでよいのか問い直す。

現行学習指導要領のもとでは、反比例の学習は中学校に移行し、比例についても関係式を扱わなくなっている。比例関係の定義やさまざまな特徴といったことから、比例になっていない関数との対比によってより明確に意識できるのではないかと考える。この教材のような比例以外の関数については、深く考察しないでも、比較して、比例のグラフの特徴を明らかにしていけるのではないかと考える。

平成14年度以降の教科書では、比例の導入場面でバケツに水を入れていくときの重さの変化($y = ax + b$)や、火のついたろうそくの時間と残りの長さの関係($y = -ax + b$)を取り扱っているものもある。また、家から公園までの時間と距離を表すグラフで、追いかけて算になるもの、公園で休憩していて時間は経過するが距離がかわらないものも取り扱われている。このように比例にならないものや比例を活用するもの考えることにより、比例のより深い理解やその有効性に気付かせる場を大切にしている。

比例を学習し、それを理解することは最低限求められている。現行の指導要領ではこれを確実に定着させることを大きな目標としている。そして、知の総合化により活用できるようにすることも求められている。算数科では後者が忘れられがちであるため、比例とみることで身の回りの事象が効率よく処理できる体験を実感することが、今大切にされなければならない。今回指摘された問題点を吟味することで、このような事例のもつ課題を理解した上で次への実践が期待できる。教材研究、指導法を出し合い、共通財産として磨いていく研修を積み重ねていきたい。